COMBINATÒRIA

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{m-n}$$

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}$$

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n} y^n$$

$C_{m,n} = \binom{m}{n}$ $\qquad$ $CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}$

$V_{m,n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)$ $\qquad$ $VR_{m,n} = m^n$

$P_m = m!$ $\qquad$ $PR_{m,(a,b,\ldots,s)} = \dfrac{m!}{a!\,b!\ldots s!}$

LOGARITMES

Definició

$\forall\, a, N \in R$ amb $N>0$, i $a>1$; es defineix: $\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$

El nombre *a* és la base del logaritme i el nombre *x* és el logaritme en base a de N.

Propietats

$\log_a(M.N) = \log_a M + \log_a N$

$\log_a(M^n) = n \log_a M$

$\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a \infty = \infty$

Notacions

Si $a=10$ s'escriu *log N* i rep el nom de Logaritme Decimal.

Si $a = e = 2'71828182\ldots$s'escriu *ln N* i rep el nom de Logaritme Neperiá.

Canvis de base

La relació entre el logaritme d'un nombre *N* en base *a* i en base *b* és donada per:

$\log_a N = (\log_b N)/(\log_b a)$

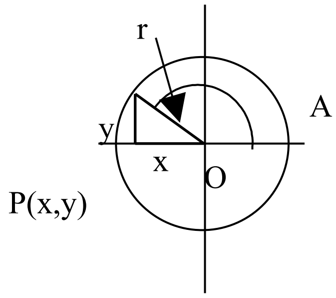
FUNCIONS I FÓRMULES TRIGONOMÈTRIQUES

Definició i relació entre les funcions trigonomètriques

sinA = y/r ; cosA = x/r ; tgA = sin A /cos A= y/x

cosecA = 1/senA = r/y ; secA = 1/cosA = r/x

cotgA = 1/tgA = x/y ;



$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

$\mathrm{cosec}^2 A - \mathrm{cotg}^2 A = 1$

2π radians = 360 graus ;

Fórmules trigonomètriques

sin (A+B) = sin A cos B + cos A sin B

sin (A-B) = sin A cos B - cos A sin B

cos (A+B) = cos A cos B - sin A sin B

cos (A-B) = cos A cos B + sin A sin B

$$\mathrm{tag}\,(A+B) = \frac{tagA + tagB}{1 - tagA\,tagB}$$

$$\mathrm{tag}\,(A-B) = \frac{tagA - tagB}{1 + tagA\,tagB}$$

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\frac{A \pm B}{2}\cos\frac{A \mp B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

sin A sin B = ½{cos (A-B) – cos (A+B)}

cos A cos B = ½{cos (A-B) + cos (A+B)}

sin A cos B = ½{sin (A-B) + sin (A+B)}

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\mathrm{tag}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

sin 2A = 2 sin A cos A

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$$\mathrm{tag}\,2A = \frac{2\mathrm{tag}A}{1-\mathrm{tag}^2 A}$$

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

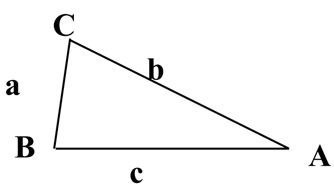
$$\mathrm{tag}\,3A = \frac{3\mathrm{tag}A - \mathrm{tag}^3 A}{1 - 3\mathrm{tag}^2 A}$$

Teorema del sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Teorema del cosinus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



NOMBRES COMPLEXOS

Un nombre complex z es pot definir com un parell de nombres reals ordenats x i y , $z = (x,y)$.
Els nombres x i y s´anomenen component real i imaginària de z respectivament.
La parella $(x,0)$ representa el nombre real x.
La parella $(0,1)$ s'anomena unitat imaginària i es representada per i.

Formes d'expressar un complex

Forma Cartesiana: $z = (x,y)$

Forma Binòmica $z = x + iy$

Forma Polar $z = (\rho)_\theta$ on $\rho = +\sqrt{x^2 + y^2}$ (mòdul de z) i $\theta = arctg\,\dfrac{y}{x}$ (argument de z)

Per tant $x = \rho cos\theta$ i $y = \rho sen\theta$

Forma Trigonomètrica $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

Forma Exponencial $z = \rho e^{i\theta}$

ja que $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ i $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ (fórmules de Moivre-Euler)

Operacions

Suma: $(x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$

Resta: $(x+iy) - (x'+iy') = (x-x') + i(y-y')$

Producte: $(x+iy).(x'+iy') = (xx'-yy') + i(xy'+yx')$

Divisió: $\dfrac{x+iy}{x'+iy'} = \dfrac{xx'+yy'}{(x')^2+(y')^2} + i\left(\dfrac{yx'-xy'}{(x')^2+(y')^2}\right)$

Les formes polars i exponencial són molt indicades per efectuar productes i divisions. Així:

$(\rho)_\theta.(\rho')_{\theta'} = (\rho\rho')_{\theta+\theta'}$ $\qquad \rho e^{i\theta}.\rho' e^{i\theta'} = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$

$(\rho)_\theta/(\rho')_{\theta'} = (\rho/\rho')_{\theta-\theta'}$ $\qquad \rho e^{i\theta}/\rho' e^{i\theta'} = (\rho/\rho')e^{i(\theta-\theta')}$

també són les més indicades per efectuar potències i radicacions

Potenciació

$[(\rho)_\theta]^n = (\rho^n)_{n\theta}$; $[\rho e^{i\theta}]^n = \rho^n e^{in\theta}$

Radicació

$[(\rho)_\theta]^{1/n} = (\rho^{1/n})_{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$; $[\rho e^{i\theta}]^{1/n} = \rho^{1/n} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ per $k = 0,1,2,...,n-1$

Propietats

$z = z' \Leftrightarrow x = x', y = y' \Leftrightarrow \rho = \rho', \theta = \theta' \pm 2k\pi$

oposat de $z = x+iy$: $-z=-x-iy$

conjugat de $z = x+iy$: $z^* = x-iy$

propietats de la cojugació:

$z+z^* = 2x$; $z-z^* = 2iy$

$(z+z')^* = z^*+z'^*$

$z.z^* = x^2 + y^2 = \rho^2$

$(z.z')^* = z^*.z'^*$

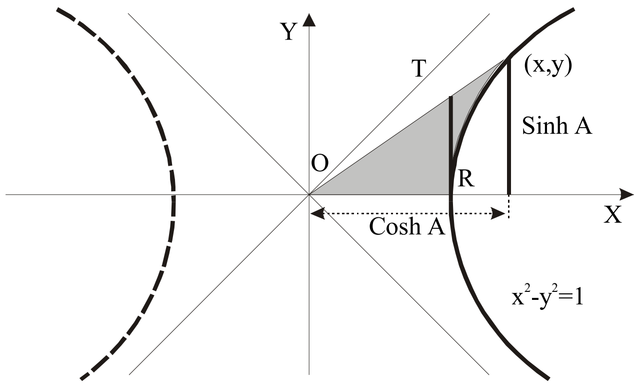
$(z/z')^*=z^*/z'^*$

El mòdul $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ d'un complex $z = x+iy$, també s'anomena "valor absolut de z" i s'escriu $|z|$, complint:
$|z+z'| \leq |z| + |z'|$; $|z.z'| = |z|.|z'|$

Logaritmació
Sigui $z = x+iy=\rho e^{i\theta}$. Es defineix $ln\ z = ln\,\rho + i(\theta + 2k\pi k)$ i com a part principal de *lnz a:* $ln\rho + i\theta$ amb $\theta = \theta + 2k\pi , \theta \in [-\pi , \pi]$

Exponenciació
Sigui $z = x+iy=\rho e^{i\theta}$. Llavors $e^z = e^x (\cos y + i \sin y) = e^{\rho\cos\theta} e^{i\rho \sin\theta}$

FUNCIONS HIPERBÒLIQUES



L'angle A és el doble de l'àrea ombrejada a la figura.

$$\sinh A = y = \frac{e^{A} - e^{-A}}{2}$$

$$\cosh A = x = \frac{e^{A} + e^{-A}}{2}$$

$$\mathrm{tagh} A = TR = \frac{e^{A} - e^{-A}}{e^{A} + e^{-A}} = \frac{\sinh A}{\cosh A}$$

$$\cosh^2 A - \sinh^2 A = 1$$

$$\sinh(A \pm B) = \sinh A \cosh B \pm \cosh A \sinh B$$

$$\cosh(A \pm B) = \cosh A \cosh B \pm \sinh A \sinh B$$

$$\mathrm{tagh}(A \pm B) = \frac{\mathrm{tagh}A \pm \mathrm{tagh}B}{1 \pm \mathrm{tagh}A.\mathrm{tagh}B}$$

$$\sinh A + \sinh B = 2\sinh\frac{A+B}{2}\cosh\frac{A-B}{2}$$

$$\sinh A - \sinh B = 2\cosh\frac{A+B}{2}\sinh\frac{A-B}{2}$$

$$\cosh A + \cosh B = 2\cosh\frac{A+B}{2}\cosh\frac{A-B}{2}$$

$$\cosh A - \cosh B = 2\sinh\frac{A+B}{2}\sinh\frac{A-B}{2}$$

sinh A sinh B = ½{cosh (A+B) – cos (A-B)}
cosh A cosh B = ½{cosh (A+B) + cosh (A-B)}
sinh A cosh B = ½{sinh (A+B) + sinh (A-B)}

$$\sinh 2A = 2\sinh A \cosh A$$

$$\cosh 2A = \cosh^2 A + \sinh^2 A$$

$$\mathrm{tagh}2A = \frac{2\mathrm{tagh}A}{1 + \mathrm{tagh}^2 A}$$

$$\sinh\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh A - 1}{2}}$$

$$\cosh\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh A + 1}{2}}$$

$$\mathrm{tagh}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cosh A - 1}{\cosh A + 1}}$$

Relacions entre les funcions trigonomètriques, les exponencials i les hiperbòliques

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{i}\sinh(i\theta) \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cosh(i\theta) \qquad \mathrm{tag}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} = \frac{1}{i}\mathrm{tagh}(i\theta)$$

LÍMIT DE FUNCIONS

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ si i només si per $\varepsilon > 0$, existeix un nombre $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de tal forma que $||f(x)-L|| < \varepsilon$ per tot x que sigui $0<||x-a||<\delta$

Formes indeterminades: $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};\infty.0;\infty-\infty;0^0;1^\infty;\infty^0$

Formes 0/0 ∞/∞, regla de L'Hôpital:

Si $\left\{\begin{array}{l}\lim_{x->a} f(x) = 0(o\infty)\\ \lim_{x->a} g(x) = 0(o\infty)\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x->a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x->a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Forma $\infty.0$

- Si $\lim_{x->a} f(x) = \infty$ i $\lim_{x->a} g(x) = 0$ llavors $\lim_{x->a} f(x).g(x) = \left\{\begin{array}{l} = \lim_{x->a}\frac{g(x)}{[1/f(x)]} \text{ per la forma } 0/0\\ = \lim_{x->a}\frac{f(x)}{[1/g(x)]} \text{ per la forma } \infty/\infty\end{array}\right.$
- S'escull la més senzilla i es resol per la regla de L'Hôpital.

Forma $\infty - \infty$

- Si $\lim_{x->a} f(x) = \lim_{x->a} g(x) = \infty$ llavors $\lim_{x->a}[f(x) - g(x)] = \left\{\begin{array}{l} = \lim_{x->a} f(x)\left\{1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right\}\\ = \lim_{x->a} g(x)\left\{\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right\}\end{array}\right.$
    - Si $\lim_{x->a}\left(f(x)/g(x)\right) = 1$, la indeterminació $\infty - \infty$ es transforma en $\infty.0$
    - Si $\lim_{x->a}\left(f(x)/g(x)\right) \neq 1$, desapareix la indeterminació

Formes exponencials $0^0;1^\infty;\infty^0$

Si les funcions f i g compleixen que el $\lim_{x->a}[f(x)]^{g(x)}$ és una de les formes indeterminades, llavors tindrem que el $\lim_{x->a} g(x)\ln f(x) = L$ o d'un altra manera $\lim_{x->a}[f(x)]^{g(x)} = e^L$

TAULA DE DERIVADES

Siguin: *k, n, a ,e* nombres reals ; *e = 2'71828182*
y, u, v, u_i funcions de la variable independent *x*, respecte a la qual es deriva, amb $v \neq 0$

$y = k$	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = n\, x^{n-1}$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = \sum_1^n u_i$	$y' = \sum_1^n u_i'$
$y = k \,.\, u$	$y' = k \,.\, u'$
$y = u \,.\, v$	$y' = u'v+uv'$
$y = \prod_1^n u_i$	$y' = \sum_1^n (u_j' \prod_1^n u_i)\ \ i \neq j$
$y = u / v$	$y' = (vu'-uv')/v^2$
$y = 1/u$	$y' = -u'/u^2$
$y = u^n$	$y' = n \,.u'.u^{n-1}$
$y = a^u$	$y' = a^u\, u' \ln a$
$y = e^u$	$y' = e^u\, u'$
$y = \log_a u$	$y' = u' / (u \ln a)$
$y = \ln u$	$y' = u' / u$
$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \sin u$
$y = \text{tag } u$	$y' = u' /\cos^2 u$
$y = \sinh u$	$y' = u' \cosh u$
$y = \cosh u$	$y' = u' \sinh u$
$y = \text{tagh } u$	$y' = u'/ \cosh^2 u$
$y = \text{cosec } u$	$y' = -u' \cos u /\sin^2 u$
$y = \sec u$	$y' = u' \sin u /\cos^2 u$
$y = \text{cotag } u$	$y' = -u' /\sin^2 u$
$y = \text{cosech } u$	$y' = -u' \cosh u /\sinh^2 u$
$y = \text{sech } u$	$y' = -u' \sinh u /\cosh^2 u$
$y = \text{cotagh } u$	$y' = -u' /\sinh^2 u$
$y = \text{arc sin } u$	$y' = u' / \sqrt{1 - u^2}$
$y = \text{arc cos } u$	$y' = - u' / \sqrt{1 - u^2}$
$y = \text{arc tag } u$	$y' = u'/(1 + u^2)$
$y = \text{arc sinh } u$	$y' = u' / \sqrt{u^2 + 1}$
$y = \text{arc cosh } u$	$y' = u' / \sqrt{u^2 - 1}$
$y = \text{arc tagh } u$	$y' = u'/(1 - u^2)$
$y = \text{arc cosec } u = \text{arc sin } (1/u)$	$y' = \dfrac{-u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}}$
$y = \text{arc sec } u = \text{arc cos } (1/u)$	$y' = \dfrac{u'}{\lvert u \rvert \sqrt{u^2 - 1}}$
$y = \text{arc cotg } u = \text{arc tag } (1/u)$	$y' = \dfrac{-u'}{1 + u^2}$
$y = \text{arc cotagh } u = \text{arc tangh } (1/u)$	$y' = \dfrac{-u'}{1 - u^2}$

SÈRIES DE TAYLOR

Desenvolupament d'una funció d'una variable

$$f(x)= f(a)+ f'(a)(x-a)+ \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n = \sum_{n\geq 0}^{\infty} A_n(x-a)^n$$

on R_n ,la resta , es pot calcular per qualsevol de les següents fórmules:

resta de Cauchy; $R_n = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a)$

resta de Lagrange; $R_n = \frac{f^{n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Essent ξ un valor qualsevol entre *a* i *x*.

Si $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, s'obté una sèrie infinita que s'anomena *sèrie de Taylor* de *f(x)* entorn al punt $x=a$.

Si *a*=0 s'anomena *sèrie de MacLaurin*.

Exemples

$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots \; [-1 < x < 1]$

$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \cdots \; [-1 < x < 1]$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \; [-\infty < x < \infty]$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \; [-\infty < x < \infty]$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \; [-\infty < x < \infty]$

$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \; [-\infty < x < \infty]$

$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \; [-\infty < x < \infty]$

REPRESENTACIÓ DE FUNCIONS

Interseccions amb els eixos
Interseccions amb l'eix X : Les arrels de la equació $f(x) = 0$ ens donen les interseccions amb l'eix X.
Interseccions amb l'eix Y : L'ordenada del punt d'intersecció de la corba amb l'eix Y es $y = f(0)$.

Estudi de les simetries
Simetria respecte a l'eix X : La corba és simètrica respecte a l'eix X quan per cada valor de x li corresponen dos valors y oposats.
Simetria respecte a l'eix Y : Es simètrica respecte a l'eix Y quan canviem (x) per $(-x)$ i l'ordenada no varia ; $y = f(x) = f(-x)$
Simetria respecte a l'origen : Es simètrica respecte a l'origen quan canviem (x) per $(-x)$ i la (y) esdevé $(-y)$; $y = f(x)$, $-y = f(-x)$

Càlcul d'assímptotes
Assímptotes verticals:

- La recta $x = a$ es una assímptota vertical (positiva) si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
- La recta $x = c$ es una assímptota vertical (negativa) si $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$

Assímptotes oblíqües (i horitzontals) :

- Si existeixen $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m_1$ i $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - m_1 x] = b_1$ la recta $y = m_1 x + b_1$ serà una assímptota oblíqua per la dreta . Si $m = 0$ la recta $y = b$ serà una assímptota horitzontal per la dreta.
- Si existeixen $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m_2$ i $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - m_2 x] = b_2$ la recta $y = m_2 x + b_2$ serà una assímptota oblíqua per l'esquerra. Si $m_2 = 0$ la recta $y = b_2$ serà una assimptota horitzontal per l'esquerra.

Intervals de creixement i decreixement
Si $f(x)$ es contínua, en els intervals on $f'(x)>0$ $[f'(x)<0]$, la funció creix [decreix]

Concavitat i convexitat
Si $f(x)$ es diferenciable, en els intervals on $f''(x)>0$ $[f''(x)<0]$, la funció és cóncava [convexa], és a dir, que representa una curvatura de la forma $\cup$ $[\cap]$

Extrems relatius (màxims i mínims)
x_0 és un extrem relatiu de $f \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$
si: $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ màxim relatiu de $f(x)$
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ mínim relatiu de $f(x)$
$f''(x_0) = 0 \Rightarrow$ calculem la primera derivada que no s'anul·li en x_0, si es parella o senar es té:

Si és d'ordre parell $f^{2n)}(x_0) \neq 0 \begin{cases} > 0, \text{ mínim} \\ < 0, \text{ màxim} \end{cases}$

Si és d'ordre senar $f^{2n+1)}(x_0) \neq 0$, llavors la funció té un Punt d'inflexió pla en x_0, ès a dir, amb tangent horitzontal || a l'eix X.

Punts d'inflexió
Si existeixen punts d'inflexió plans ja hauran aparegut estudiant l'existencia de màxims i mínims.
x_0 és un punt d'inflexió de $f \Leftrightarrow f''(x_0) = 0$ i exiteix una derivada d'ordre senar $f^{2n+1)}(x_0) \neq 0$

INTEGRACIÓ: PRIMERES PROPIETATS

$$\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$$

$$\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad a \leq c \leq b$$

Regla de Barrow

Si $\int f(x)dx = F(x) + C \rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\ ; \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$

Intervals infinits

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{x\to\infty}\int_{-x}^a f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (\text{independent de } a)$$

Taula d'integrals immediates

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad si \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln x\ dx = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln(\sin x) + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cot}g\,x + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

$$\int \operatorname{tgh} x\,dx = \ln(\cosh x) + C$$

$$\int \operatorname{cotgh} x\,dx = \ln(\sinh x) + C$$

$$\int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsinh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctgh} x + C; |x| < 1 \\ \operatorname{arccotgh} x + C; |x| > 1 \end{cases}$$

MÈTODES BÀSICS D'INTEGRACIÓ

Integració per parts

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

Integració de funcions racionals $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

- <u>Primer cas</u>: *grau P(x) < grau Q(x)*
  - **a)** Siguin $a_1 \ldots a_n$ les arrels (reals i complexes) de $Q(x)$ i siguin $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ els seus graus respectius de multiplicitat
    $Q(x) = c(x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_n)^{\alpha_n}$ sent c el coeficient de major potència de $Q(x)$.
  - **b)** Es planteja la igualtat.
    $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A^1_{\alpha_1}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A^1_{\alpha_1-1}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \ldots + \frac{A^1_1}{(x-a_1)} + \ldots + \frac{A^n_{\alpha_n}}{(x-a_1)^{\alpha_n}} + \frac{A^n_{\alpha_n-1}}{(x-a_1)^{\alpha_n-1}} + \ldots + \frac{A^n_1}{(x-a_1)}$$
    on el nombres A^i_j son coeficients a determinar.
  - **c)** Es resol l'equació i s'obtenen els coeficients A^i_j.
  - **d)** S'integra cadascun dels sumands que intervinguin a la igualtat plantejada en **b)** Tenint en compte que:
    $$si\ j \neq 1 \int \frac{A^i_j}{(x-a_i)^j} = \frac{A^i_j}{(1-j)}\frac{1}{(x-a_i)^{j-1}}$$
    $$si\ j = 1 \int \frac{A^i_j}{(x-a_i)} = A^i_j \ln(x - a_i)$$
  - **e)** Si hi ha arrels complexes $a = \alpha + i\beta$, llavors
    $\ln(\alpha + i\beta) = \ln\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + i\,\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$, simplificant convenienment el resultat de la integral de $P(x)/Q(x)$, aquest ha de ser un resultat sense valors complexos.

- <u>Segon cas</u>: *grau P(x)* $\geq$ *grau Q(x)*
  s'efectua la divisió obenint un quocient $C(x)$ i una resta $R(x)$ $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$.
  $\int \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)\,dx + \int \dfrac{R(x)}{Q(x)}dx$. La $\int C(x)\,dx$ és trivial i la $\int \dfrac{R(x)}{Q(x)}dx$ correspon al primer cas.

Integrals del tipus $\int F\left[x, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right]dx$

El canvi de variable $t = \left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{u}}$; $x = \dfrac{dt^u - b}{a - ct^u}$ sent $u = m.c.m.\ (n,\text{---},q)$
la transforma en integral d'una funció racional.

Integrals Binomials $\int x^n (a+bx^n)^p\, dx$

El canvi $x^n = t$, $x = t^{1/n}$, $dx = \dfrac{t^{\frac{1}{n}-1}}{n} dt$ ho racionalitza sempre i quan sigui enter un dels tres nombres següents $p, \dfrac{m+1}{n}, \dfrac{m+1}{n}+p$. En cas contrari la racionalització és impossible.

Integrals del tipus $\int F[\sin x, \cos x, tg\, x]\, dx$

El canvi $tg\dfrac{x}{2} = t \rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \; dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ tg\, x = \dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$ es redueix la integral d'una funció racional sobre *t*.

Integrals del tipus $\int \sin^m x \cos^n x\, dx \quad (m, n \in \mathbb{Z})$

- Si *m* és senar, llavors *cos x = t*
- Si *n* és senar, llavors *sin x = t*
- Si *m* i *n* son de la mateixa paritat es pot fer *tg x = t*

Integrals del tipus $\int F[a^x]\, dx$

El canvi $a^x = t; x = \log_a t; dx = \dfrac{dt}{t \ln a}$ la converteix en la integral de una funció racional en *t*.

El procediment generalitzable a $\int F[f(x)]\, dx$ amb *F* sent una funció racional, i *f(x)* tal que la seva funció inversa tingui derivada racional, llavors el canvi *f(x) = t* transforma la integral en una racional.

Taula d'integrals

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+b)} = x - b\ln(x+b)$$

$$\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\;dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arc tag}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\text{arc cotagh}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 \pm a^2\right)$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^2+a^2} = x - a\left(\text{arc tag}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{x^2-a^2} = x - a\left(\text{arc cotagh}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 \pm a^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2 \pm a^2)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \mp\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\text{arc cosech}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arcsec}\frac{x}{a}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\;dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = \pm\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int x\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}\;dx = \frac{1}{5}(x^2 \pm a^2)^{5/2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\text{arc sech}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x}$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\;dx = -\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int x\sqrt{(a^2-x^2)^3}\;dx = -\frac{1}{5}(a^2-x^2)^{5/2}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^n+a)} = \frac{1}{na}\ln\left(\frac{x^n}{x^n+a}\right)$$

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{(x^n+a)} = \frac{\ln(x^n+a)}{n}$$

$$\int x e^x dx = e^x(x-1)$$

$$\int \frac{e^x}{x}dx = \ln x + \frac{x^1}{1.1!} + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^3}{3.3!} + \ldots.$$

$$\int \frac{dx}{a e^x + b} = \frac{x}{b} - \frac{\ln(a e^x + b)}{b}$$

$$\int e^x \sin x\;dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \cos x\;dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\int e^x \ln x\;dx = e^x \ln x - \int \frac{e^x}{x}dx$$

$$\int \log_a x\;dx = x(\log_a x - \log_a e)$$

$$\int x^n \ln x\;dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)\;;\; n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2.2!} + \frac{\ln^3 x}{3.3!}$$

$$\int \sin^2 x\ dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \cos^2 x\ dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \mathrm{tag}^2 x\ dx = \mathrm{tag}\, x - x$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln(\mathrm{cosec}\, x - \mathrm{cotg}\, x) = \ln\left(\mathrm{tag}\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln(\sec x + \mathrm{tag}\, x)$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{tag}^2 x} = -x - \mathrm{cotg}\, x$$

$$\int x \sin x\ dx = \sin x - x\cos x$$

$$\int x \cos x\ dx = \cos x + x\sin x$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} + \ldots..$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx = \ln x - \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^4}{4.4!} + \ldots..$$

$$\int \sin^n x\ \cos x\, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}$$

$$\int \cos^n x\ \sin x\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$$

$$\int \mathrm{arcsin}\, x\ dx = x\,\mathrm{arcsin}\, x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \mathit{arc}\cos x\ \mathit{dx} = x\,\mathit{arc}\cos x - \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \mathrm{arctag}\, x\ dx = x\,\mathrm{arctag}\, x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\int \mathrm{arccotag}\, x\ dx = x\,\mathrm{arccotag}\, x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$\int x\,\mathrm{arcsin}\, x\ dx = \frac{1}{4}\left[(2x^2-1)\ \mathrm{arcsin}\, x + x\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$\int x\,\mathrm{arccos}\, x\ dx = \frac{1}{4}\left[(2x^2-1)\ \mathrm{arccos}\, x - x\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$\int x\,\mathrm{arctg}\, x\ dx = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ \mathrm{arctg}\, x - x\right]$$

$$\int x\,\mathrm{arccotg}\, x\ dx = \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\ \mathrm{arccotg}\, x + x\right]$$

$$\int \sinh^2 x\ dx = \frac{\sinh 2x}{4} - \frac{x}{2}$$

$$\int \cosh^2 x\ dx = \frac{\sinh 2x}{4} + \frac{x}{2}$$

$$\int \mathrm{tgh}^2 x\ dx = x - \mathrm{tgh}\, x$$

$$\int \frac{dx}{\sinh x} = \ln\left(\mathrm{tgh}\frac{x}{2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = 2\,\mathrm{arctg}\, e^x$$

$$\int \frac{dx}{\mathrm{tgh}^2 x} = x - \mathrm{cotgh}\, x$$

$$\int x \sinh x\ dx = x \cosh x - \sinh x$$

$$\int x \cosh x\ dx = x \sinh x - \cosh x$$

$$\int \frac{\sinh x}{x} dx = x + \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} + \ldots.$$

$$\int \frac{\cosh x}{x} dx = \ln x + \frac{x^2}{2.2!} + \frac{x^4}{4.4!} + \ldots.$$

$$\int \sinh^n x\ \cosh x\ dx = \frac{\sinh^{n+1} x}{n+1}\ ;\ n \neq -1$$

$$\int \cosh^n x\ \sinh x\ dx = \frac{\cosh^{n+1} x}{n+1}\ ;\ n \neq -1$$

$$\int \mathrm{arcsinh}\, x\ dx = x\,\mathrm{arcsinh}\, x - \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \mathrm{arccosh}\, x\ dx = x\,\mathrm{arccosh}\, x - \sqrt{x^2-1}$$

$$\int \mathrm{arctgh}\, x\ dx = x\,\mathrm{arctgh}\, x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

$$\int \mathrm{arccotgh}\, x\ dx = x\,\mathrm{arccotgh}\, x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

$$\int x\,\mathrm{arcsinh}\, x\ dx = \frac{1}{4}\left[(2x^2+1)\,\mathrm{arcsinh}\, x - x\sqrt{x^2+1}\right]$$

$$\int x\,\mathrm{arccosh}\, x\ dx = \frac{1}{4}\left[(2x^2-1)\,\mathrm{arccosh}\, x - x\sqrt{x^2-1}\right]$$

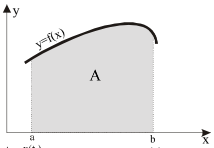
$$\int x\,\mathrm{arctgh}\, x\ dx = \frac{1}{2}\left[x + (x^2-1)\,\mathrm{arctgh}\, x\right]$$

$$\int x\,\mathrm{arccotgh}\, x\ dx = \frac{1}{2}\left[x + (x^2-1)\,\mathrm{arccotgh}\, x\right]$$

CÀLCUL D'ÀREES PLANES

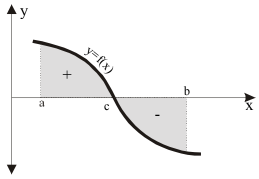
Forma Cartesiana

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$



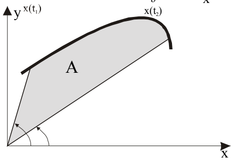
I si canvia el signe

$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$



Forma Polar

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(r(\theta)\right)^2 d\theta$$



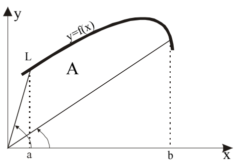
Forma Paramètrica

$$\text{Equacions}\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\frac{dx(t)}{dt}dt$$

CÀLCUL DE LA LONGITUD D'UN ARC DE CORBA

Forma Cartesiana

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$



Forma Polar

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(\theta) + \left[\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right]^2}\,d\theta$$

Forma Paramètrica

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2}\,dt$$

ÀREA D'UNA SUPERFÍCIE DE REVOLUCIÓ AL VOLTANT DE L'EIX X

Forma Cartesiana

$$S = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Forma Polar

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} r\sin\theta \sqrt{r^2(\theta) + \left[\frac{dr(\theta)}{d\theta}\right]^2}\,d\theta$$

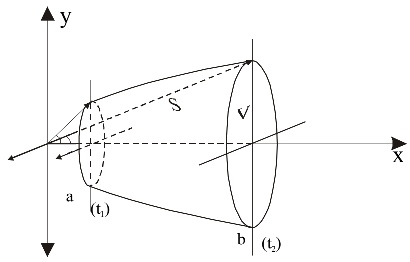
Forma Paramètrica

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy(t)}{dt}\right]^2}\,dt$$

VOLUMS DE REVOLUCIÓ AL VOLTANT DE L'EIX X

Forma Cartesiana

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$



Forma Polar

$$V = \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^3(\theta)\,\sin^3\theta\,d\theta$$

Forma Paramètrica

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]dt$$

AL VOLTANT DE L'EIX Y

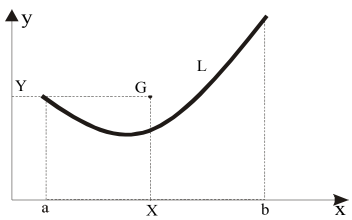
Només cal canviar *X* per *Y*, i *Y* per *X,* en les fórmules anteriors.

CENTRES DE GRAVETAT

D'un arc de corba

$$X = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$Y = \frac{1}{L}\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$



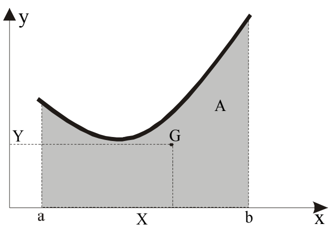
On L es la longitud total del arc on

$\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = dL$ i.e.; $X = \frac{1}{L}\int_a^b y\,dL; Y = \frac{1}{L}\int_a^b x\,dL$

D'una àrea plana

$$X = \frac{1}{A}\int_a^b xy\,dx$$

$$Y = \frac{1}{2A}\int_a^b y^2\,dx$$



VECTORS

Sent $\vec{A} = A_1\vec{i} + A_2\vec{j} + A_3\vec{k}$; $\vec{B} = B_1\vec{i} + B_2\vec{j} + B_3\vec{k}$ vectors en coordenades cartesianes

Mòdul d'un vector: $|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$

Suma: $\vec{A} + \vec{B} = (A_1 + B_1)\vec{i} + (A_2 + B_2)\vec{j} + (A_3 + B_3)\vec{k}$

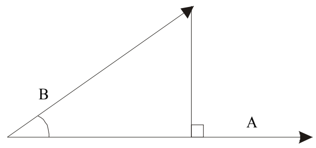
Producte per un escalar: $n\vec{A} = nA_1\vec{i} + nA_2\vec{j} + nA_3\vec{k}$

Vector unitari en la direcció de $\vec{A}$: $\vec{A}/|\vec{A}|$

Producte escalar

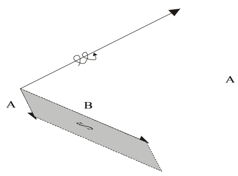
$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\theta, (0 \leq \theta \leq \pi)$

$\vec{A}.\vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$



Producte vectorial

$$\vec{A} \wedge \mathbf{\vec{B}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$



$|\vec{A} \wedge \mathbf{\vec{B}}| = |\vec{A}|.|\mathbf{\vec{B}}|\sin\theta = S$

direcció de $(\vec{A} \wedge \mathbf{\vec{B}})$: perpendicular al pla $(\vec{A}, \mathbf{\vec{B}})$

sentit de $(\vec{A} \wedge \mathbf{\vec{B}})$: el que fa que $\vec{A}, \mathbf{\vec{B}}, \vec{A} \wedge \mathbf{\vec{B}}$ siguin un sistema dextrors.

Fórmules i propietats diverses

$\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$

$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$

$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$

$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}.\vec{B})$

$(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} = \vec{B}(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{A}(\vec{B}.\vec{C})$

$$\vec{A}.(\mathbf{\vec{B}} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$(\vec{A} \wedge \vec{B}).(\vec{C}.\vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C})(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$

COORDENADES CURVILÍNIES

Equacions de transformació

$$x = x(u_1, u_2, u_3);\ y = y(u_1, u_2, u_3);\ z = z(u_1, u_2, u_3);$$

$$\vec{r} = \left(x(u_1, u_2, u_3), y(u_1, u_2, u_3), z(u_1, u_2, u_3)\right)$$

Factors d'escala

$$\mathrm{h}_1 = \left[\frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial \mathrm{u}_1}\right] \quad \mathrm{h}_2 = \left[\frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial \mathrm{u}_2}\right] \quad \mathrm{h}_3 = \left[\frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial \mathrm{u}_3}\right]$$

Base

$$\vec{\mathrm{e}}_1 = \frac{1}{\mathrm{h}_1}\left[\frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial \mathrm{u}_1}\right]\ ;\ \vec{\mathrm{e}}_2 = \frac{1}{\mathrm{h}_2}\left[\frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial \mathrm{u}_2}\right]\ ;\ \vec{\mathrm{e}}_3 = \frac{1}{\mathrm{h}_3}\left[\frac{\partial \vec{\mathrm{r}}}{\partial \mathrm{u}_3}\right]$$

Diferencials

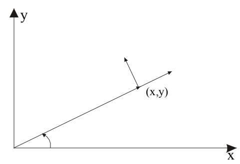
$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \mathrm{h}_1\mathrm{du}_1\,\vec{\mathrm{e}}_1 + \mathrm{h}_2\mathrm{du}_2\,\vec{\mathrm{e}}_2 + \mathrm{h}_3\mathrm{du}_3\,\vec{\mathrm{e}}_3$$

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{h}^2{}_1\mathrm{du}^2{}_1 + \mathrm{h}^2{}_2\mathrm{du}^2{}_2 + \mathrm{h}^2{}_3\mathrm{du}^2{}_3$$

$$\mathrm{dV} = \mathrm{h}_1\,\mathrm{h}_2\mathrm{h}_3\mathrm{du}_1\mathrm{du}_2\mathrm{du}_3$$

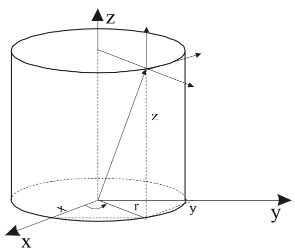
Coordenades polars del pla (ρ, θ)

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \begin{aligned} h_1^2 &= 1 \\ h_2^2 &= \rho^2 \end{aligned}$$



Coordenades Cilíndriques (ρ, θ, z)

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\} \begin{aligned} h_1^2 &= 1 \\ h_2^2 &= \rho^2 \\ h_3^2 &= 1 \end{aligned}$$



Coordenades Esfèriques (r, φ, θ)

$$x = r\sin\varphi\ \cos\theta$$

$$y = r\sin\varphi\ \sin\theta$$

$$z = r\cos\varphi$$

$$h_1^2 = 1\ ;h_2^2 = r^2\ ;h_3^2 = r^2\sin^2\varphi$$