

<u>ÍNDEX</u>	2-3
<u>1. MATRIUS</u>	<u>4-6</u>
<u>1.1. Tipus de matrius</u>	
1.1.1. Segons la forma	
1.1.2. Segons els elements	
<u>1.2. Operacions amb matrius</u>	
1.2.1. Suma i resta	
1.2.2. Producte de matrius per un nombre	
1.2.3. Producte de matrius	
<u>1.3. Matriu inversa</u>	
<u>2. DETERMINANTS</u>	<u>7-8</u>
<u>2.1. De tercer ordre</u>	
<u>2.2. L'adjunt d'un element</u>	
<u>2.3. Càlcul de la matriu inversa per mitja de determinants</u>	
<u>2.4. Matrius amb paràmetres: matriu inversa</u>	
<u>3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS</u>	<u>9-12</u>
<u>3.1. En general</u>	
<u>3.2. Teorema de Rouché</u>	
<u>3.3. Mètode de Gauss</u>	
3.3.1. Sistema de dues equacions	
3.3.2. Sistema de tres equacions	
<u>3.4. Mètode de Cramer</u>	
<u>3.5. Resolució de sistemes per la matriu inversa</u>	

4. VECTORS

13-15

4.1. Conceptes bàsics

4.2. Producte escalar

4.3. Producte vectorial

4.4. Producte mixt

5. EQUACIÓ DE LA RECTA I EL PLA

16-17

5.1. Punts coplanaris i colineals

5.2. Equacions de la recta

5.2.1. Equació vectorial

5.2.2. Equació paramètrica

5.2.3. Equació contínua

5.2.4. Equació de la recta que passa per dos punts

5.3. Equacions del pla

1. MATRIUS

En matemàtiques anomenem *matriu* tant a les llistes com a les taules d'elements. Fixem-nos en la matriu següent:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si ens fixem, cada element té com a subíndex. El primer dels nombre indica la **fila** en què ens trobem (el valor màxim està indicat com a m) mentre que el segon estableix la **columna** (i el nombre màxim és n).

El nombre de files i columnes d'una matriu s'anomena **dimensió**, i es designa per $m \cdot n$. En el cas que el nombre m sigui igual a n , la matriu serà quadrada i l'anomenarem *matriu d'ordre n* .

1.1. Tipus de matrius

1.1.1. Segons la forma

- **Matriu filera:** és aquella que només té una filera, per exemple $A = (1 \quad 4 \quad 2)$
- **Matriu columna:** només té una columna. Exemple: $A = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$
- **Matriu quadrada:** té el mateix nombre de files i de columnes. Un exemple seria la

següent: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

- **Matriu rectangular:** la matriu tindrà forma de rectangle. Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
- **Matriu transposada:** és aquella que s'obté canviant les files per les columnes. Si la primera matriu té una dimensió $m \cdot n$, després en tindrà

$n \cdot m$. Fixem-nos: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

- **Matriu simètrica:** la coneixem com aquella en que els elements

a_{12} i a_{21} , a_{23} i a_{32} , etc. són iguals. Veiem-ho: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

- **Matriu antisimètrica:** igual que l'anterior, però ara un dels nombres serà de signe

contrari. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 5 & -6 \\ -7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

1.1.2. Segons els elements

- **Matriu nul·la (o zero):** tots els seus elements valen 0. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- **Matriu diagonal:** únicament els nombres són diferents a 0 a la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

- **Matriu escalar:** igual que l'anterior, però tots els nombres de la diagonal són els

mateixos. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- **Matriu identitat (o unitat):** igual que l'anterior, però a la diagonal només hi ha el

$$\text{número 1. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriu triangular:** matriu quadrada en que tots els termes que es troben per sota (o per sobre) de la diagonal són nuls.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ triangular superior} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ triangular inferior}$$

1.2. Operacions amb matrius

1.2.1. Suma i resta

Tant la resta com la suma de matrius (de la mateixa dimensió) es realitza component a component. Veiem-ho amb els següents exemples.

$$\text{SUMA} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{RESTA} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2. Producte de matrius per un nombre

Es realitza multiplicant cada el nombre per cada component

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 42 & 21 & 56 \end{pmatrix}$$

Tot i que la matriu fos d'una dimensió superior, el procediment seria el mateix.

1.2.3. Producte de matrius

Per tal de multiplicar matrius, hem de fixar-nos que el n° de columnes de la primera sigui igual al de files de la segona. Per operar i trobar, per posar un cas, l'element a_{23} , haurem de multiplicar tota la segona fila de la primera matriu per tota la tercera columna de la segona. Exemple:

1	2	3
-1	5	0
2	1	2

 ·

1	2	-1	5
0	-1	2	3
3	2	4	6

 =

10	6	15	29
-1	-7	11	10
8	7	8	25

1.3. Matriu inversa

Calculem la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hem de trobar una matriu $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - t = 0 \\ y + t = 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1/3 \quad y = 1/3 \quad z = -1/3 \quad t = 2/3 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

2. DETERMINANTS

2.1. De tercer ordre

Per tal de calcular el valor d'un determinant 3x3 hem d'utilitzar la regla de Sarrus, consistent a multiplicar i sumar els productes per després multiplicar i restar, tal i com s'indica al següent exemple:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 0 - 5 - (8 + 0 - 30) = -19$$

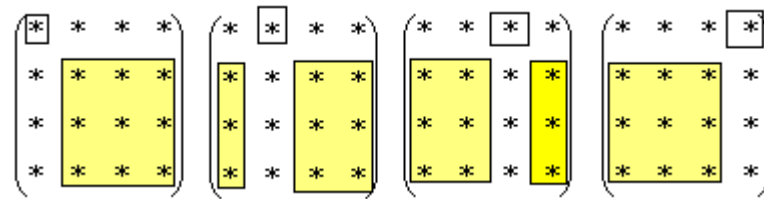
2.2. L'adjunt d'un element

Es designa com adjunt d'un element al determinant que resta en eliminar la fila i columna on es troba aquest. El mètode dels adjunts és una altra manera de trobar el valor d'un determinant.

Una de les seves característiques es que cada nombre té un signe assignat:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Fixem-nos-hi en el següent esquema, on el quadrat pintat indica el determinant del nombre que volem saber (el quadrat sense pintar).



2.3. Càlcul de la matriu inversa per mitja de determinants

Donada una matriu quadrada A , s'anomena matriu adjunta de A , i es representa per $\text{Adj } A$, la matriu que s'obté en substituir cada element pel seu adjunt. Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = -2$$

Els adjunts de cada element són:

i la matriu adjunta:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 2 & A_{12} = -4 & A_{13} = -7 \\ A_{21} = 0 & A_{22} = -2 & A_{23} = -2 \\ A_{31} = -2 & A_{32} = 4 & A_{33} = 6 \end{array} \quad \text{adj}A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

A continuació trobem la transposada i la multipliquem per la matriu A

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Resumint, per trobar la matriu inversa hem d'aplicar la fórmula següent: $A^{-1} = \frac{{}^t \text{adj}A}{\det A}$

2.4. Matrius amb paràmetres: matriu inversa

Imaginem que tenim la següent matriu i ens demanen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Calcula } m \text{ de manera que la matriu } A \text{ no tingui inversa.}$$

El primer que hem de fer és calcular el determinant de la matriu: $\det A = -1$

Si el determinant de la matriu fos 0, això voldria dir que $m-1=0$, d'on podem extreure que la matriu no té inversa quan $m=1$.

Per a tota la resta de casos existirà inversa, ja que el determinant de la matriu serà diferent de 0.

3. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

3.1. En general

Una solució del sistema és un conjunt ordenat de nombres reals $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$ de manera que en substituir les incògnites x_1 per s_1 , x_2 , etc. les matrius se satisfan alhora.

Podem classificar els sistemes de la següent manera:

$$\text{SISTEMA} \begin{cases} \text{Compatible} \begin{cases} \text{determinat (una única solució)} \\ \text{indeterminat (infinites solucions)} \end{cases} \\ \text{Incompatible} \end{cases}$$

$$\text{Matriu del sistema} \rightarrow M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriu ampliada del sistema} \rightarrow M^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

3.2. Teorema de Rouché

El teorema de Rouché ens diu que un sistema és compatible si el rang de la matriu dels coeficients de les incògnites és igual al rang de la matriu ampliada amb la columna dels termes independents.

Dins el teorema de Rouché podem tenir els següents tipus de sistemes:

- **S.C.D.** $rgM = rgM^* = n^{\circ} \text{ incògnites}$
- **S.C.I.** $rgM = rgM^* < n^{\circ} \text{ incògnites}$
- **S.I.** $rgM \neq rgM^*$

Exemple: Estudia la compatibilitat i el nombre de solucions del següent sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Rang $M=2$, ja que la columna C_3 és igual a C_1 i les dues primeres columnes són proporcionals.

Rang $M^*=3$, ja que $\det(C_1, C_2, B) \neq 0$

Per tant es tracta d'un sistema incompatible (S.I.), ja que $rgM \neq rgM^*$

3.3. Mètode de Gauss

3.3.1. Sistema de dues equacions

Ens centrarem en el mètode de reducció – substitució, i per aprendre'n ens fixarem en el següent exemple.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 9x + 4y = 108 \end{cases}$$

Multipliquem la 1a equació per 2, deixem la segona com estava i sumem.

$$\begin{array}{r} 6x - 4y = 12 \\ 9x + 4y = 108 \\ \hline 15x = 120 \end{array}$$

D'on podem concloure que: $x=8$. Ara només cal substituir x a l'equació principal per extreure el valor d' y .

$$72 + 4y = 108 \rightarrow y = 9$$

Solucions: $x=8, y=9$

3.3.2. Sistema de tres equacions

Els sistema de tres equacions de Gauss consisteix a fer zeros a la matriu per tal de trobar les incògnites. Fixem-nos en el següent exemple:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F_2' = F_1 - F_2 \\ F_3' = F_1 + F_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow F_3'' = F_2 - F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

D'aquesta última matriu podem extreure que $z = 1$. A partir d'aquesta incògnita desvelada podem saber les altres dues:

$$2y - 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow y = 1$$

$$x + 1 - 1 = 1 \rightarrow x = 1$$

S.C.D. Solucions (1,1,1)

3.4. Mètode de Cramer

Un sistema d'equacions lineals és un sistema de Cramer si compleix:

- Té n equacions i n incògnites.
- El determinant de la matriu de coeficients del sistema és diferent a zero.
- És un Sistema Compatible (S.C.)

Per tal de trobar les incògnites hem de seguir els passos que es poden apreciar a l'exemple següent:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12}{4} = 3$$

3.5. Resolució de sistemes per la matriu inversa

Si una matriu A és regular, hi ha d'haver alguna manera de trobar-ne la seva inversa. La fórmula per esbrinar-la és la següent:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Comprovem-ho amb el següent exercici resolt:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \text{que en forma matricial és: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & -2/5 & 1/10 \\ 1/2 & 1/5 & -3/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per tant, $x = 1, y = 2, z = 3$

4. VECTORS

4.1. Conceptes bàsics

- **Combinació lineal de vectors:** un vector u de V és combinació lineal dels vectors $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ de V , si pot expressar-se així:

$$u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + a_3 \cdot u_3 + \dots + a_n \cdot u_n$$

sent $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ números reals.

Exemple: expressa $(3,4,5)$ com combinació lineal dels vectors $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$

$$(3,4,5) = 3(1,0,0) + 4(0,1,0) + 5(0,0,1)$$

- **Dependència o independència lineal de vectors:** un conjunt de vectors és *linealment dependent* si un qualsevol d'ells es pot expressar com combinació lineal dels restants. En cas contrari són *linealment independents*.

- **Dependents:** $a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n = 0$, amb algun $a_i \neq 0$

- **Independents:** $a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_n \cdot u_n = 0$, amb tots els a_i nuls

$$(0,0,0) = \alpha (a,b,c) + \beta (a,b,c) + \chi (a,b,c)$$

- **Generador:** si un conjunt de vectors són linealment independents i a més combinació lineal, diem que són generadors
- **Vector fix $\overrightarrow{AB}$:** és un segment orientat que té l'origen en el punt A i l'extrem en el punt B. En podem conèixer el mòdul, la direcció i el sentit.
- **Vector lliure:** és cada una de les classes en què queda classificat el conjunt F^3 mitjançant la relació d'equipol·lència.
- **Suma i resta de vectors:** és sumen (o es resten) els components d'un vectors amb els de l'altre.
- **Producte d'un nombre real per un vector:** es multiplica cada component del vector pel nombre desitjat. Exemple: $3 \cdot (1,4,2) = (3,12,6)$
- $\overrightarrow{AB} = B - A \rightarrow \text{extrem} \rightarrow B = \overrightarrow{AB} + A$
 $\rightarrow \text{origen} \rightarrow A = B - \overrightarrow{AB}$
- **Perímetre:** Suma de les $\sqrt{}$ (fer-ne el mòdul)
- **Punt mig:** $\frac{\text{extrem} + \text{origen}}{2}$

4.2. Producte escalar

El producte escalar de dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ es designa per $\vec{u} \cdot \vec{v}$ i s'obté de la manera següent:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\angle \vec{u}, \vec{v}) \\ 0 \rightarrow \text{Si els vectors són perpendiculars} \end{cases}$$

Exemple: Quin és el producte escalar dels vectors $(3,2,1)$ i $(1,2,3)$? Són perpendiculars?

$$(3,2,1) \cdot (1,2,3) = 3 + 4 + 3 = 10 \rightarrow \text{Producte escalar}$$

$$10 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} \rightarrow \cos \alpha = 0,714 \rightarrow \alpha = 45'85'' . \quad \text{No són } \perp .$$

4.3. Producte vectorial

El producte vectorial de dos vectors lliures de V^3 , $\vec{u}$ i $\vec{v}$ és un altre vector que es designa per $\vec{u} \times \vec{v}$, i que s'obté de la manera següent:

a) Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors no nuls i no proporcionals, $\vec{u} \times \vec{v}$ és un vector que té:

a. Mòdul: $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$

b. Direcció: perpendicular als vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$

c. Sentit: el sentit d'avançament d'un llevataps que gira en sentit positiu de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

b) Si $\vec{u} = 0$ o $\vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0$

El producte vectorial és emprat, entre altres coses, en el càlcul d'àrees. Fixem-nos-hi:

Tenim els vector $\vec{u} = (2,1,5)$, $\vec{v} = (3,2,1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 13\vec{j} + \vec{k}$$

$$S = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-9)^2 + 13^2 + 1} = \sqrt{251} = 15,84 \text{ ul}^2$$

4.4. Producte mixt

El producte mixt de tres vectors lliures de l'espai $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ és un nombre real que es designa per $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ i que s'obté de la manera següent:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

El producte mixt servei, per posar un cas, pel càlcul de volums de tetràedres o paral·lelepípedes. Veiem-ho amb l'exemple següent:

Donats els punts $A = (0,0,0)$, $B = (0,0,2)$, $C = (0,2,0)$, $D = (2,0,0)$ calcula el volum del tetràedre (piràmide de base triangular).

$$\frac{1}{6}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

5. EQUACIÓ DE LA RECTA I EL PLA

5.1. Punts coplanaris i colineals

- a) $A_1, \dots, A_n$ són colineals $\Leftrightarrow rg(A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n) = 1$
b) $A_1, \dots, A_n$ són coplanaris $\Leftrightarrow rg(A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n) = 2$

5.2. Equacions de la recta

* Formes per identificar una recta:

- a) Dos punts $\rightarrow r(A, B)$
b) Un punt i un vector director $\rightarrow r(A, \vec{ur})$

5.2.1. Equació vectorial

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} \\ \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{ur}\end{aligned}$$

$$\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{ur}$$

5.2.2. Equació paramètrica

S'aconsegueix igualant component a component a l'expressió vectorial.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= (x, y, z) & (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + \lambda (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}) \\ \overrightarrow{OA} &= (x_0, y_0, z_0) & \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda \cdot u_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot u_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot u_3 \end{array} \right. \\ \overrightarrow{ur} &= (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})\end{aligned}$$

5.2.3. Equació contínua

La podem trobar buscant el valor de λ a les tres equacions, i igualant els valors obtinguts.

$$\lambda = \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

A continuació, a mode d'exemple, obtindrem les tres equacions de la recta a partir del punt

$$P = (2, 4, -5) \text{ i el vector director } \overrightarrow{ur} = (3, 2, -1)$$

$$\text{Equació vectorial} \rightarrow \vec{x} = (2, 4, -5) + \lambda \cdot (3, 2, -1)$$

$$\text{Equació paramètrica} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = -5 - \lambda \end{array} \right.$$

$$\text{Equació contínua} \rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 4}{2} = \frac{z + 5}{-1}$$

5.2.4. Equació de la recta que passa per dos punts

$$\text{Per esbrinar-la hem d'utilitzar la fórmula: } \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

5.3. Equacions del pla

* Formes per determinar un pla

- a) Un punt i dos vectors directors $\alpha (A, v, w)$
- b) 3 punts $\alpha (A, B, C)$
- c) Un punt i un vector normal $(A, \vec{ur})$
- d) Una recta i un punt exterior